

2 OSNOVE MEHANIKE

Principi naprezanja i deformacije osnova su za razumijevanje kvantitativnih i kvalitativnih značajki stijena i tala (poglavlja 4-10).

NAPREZANJE

Primjeri sila koje uzrokuju deformaciju (i konačno slom) tla/stijene: prirodne sile koje djeluju na mase stijena/tala; sile koje nastaju kao posljedica građenja, a djeluju na mase stijena/tala; sile koje se nanose na uzorke tijekom laboratorijskih pokusa.

Sila potreba za određenu deformaciju materijala ovisit će (tj. proporcionalna je) o veličini površine na koju se nanosi. Naprezanje ne ovisi o površini.

Naprezanje – sila po jediničnoj površini (sinonim pritisak), Jedinica za silu je newton (N); jedinica za naprezanje N/m^2 ili pascal (Pa).

Naprezanje je vektor koji se rastavlja na dvije komponente. promatrano u odnosu na plohu na koju djeluju to su: okomita ili normalna komponenta; i paralelna ili posmična komponenta. Na slici su predložene komponente (tlačna i posmična) naprezanja koje djeluju na dvodimenzionalnu plohu (zanemarive debljine) u ravnini XY. U stanju ravnoteže (gdje su momenti jednaki nuli) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

ANALIZE NAPREZANJA

Stanje naprezanja koje djeluje u određenoj točki tijela je trodimenzionalno. Radi pojednostavlivanja, promatra se dvodimenzionalno stanje naprezanja na element zanemarive debljine. Polje naprezanja je isto kao na prethodnoj slici, ali ovdje se promatra neka proizvoljno odabrana 'kosa' ploha. Vektor naprezanja P_n je okomit na promatranu plohu, a s osi X zatvara kut θ . Naprezanja σ_x , σ_y , τ_{xy} i τ_{yx} su poznata. Traže se normalna i posmična naprezanja na plohu, tj. σ_n i τ_n .

Vektor naprezanja P_n se rastavlja na vektore P_x i P_y , paralelne osima X i Y. S obzirom na stanje statičke ravnoteže, sile koje djeluju na trokutasti element moraju biti

jednake u smjeru X i Y, što je izraženo sljedećim jednadžbama:

$$AB \cdot P_x = OB \cdot \sigma_x + OA \cdot \tau_{yx} \quad (1)$$

$$AB \cdot P_y = OA \cdot \sigma_y + OB \cdot \tau_{xy} \quad (2)$$

gdje se svaka komponenta sile dobije kao umnožak naprezanja i površine na koju ono djeluje.

$$OA = AB \sin \theta \quad (3)$$

$$OB = AB \cos \theta \quad (4)$$

Uvrštavanjem jednadžbi 3 i 4 u jednadžbe 1 i 2 dobivaju se sljedeći izrazi za komponente vektora naprezanja:

$$P_x = \sigma_x \cos \theta + \tau_{yx} \sin \theta \quad (5)$$

$$P_y = \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \quad (6)$$

Izraz za σ_n (izražen pomoću σ_x , σ_y , τ_{xy} i τ_{yx}) može se dobiti zbrajanjem jednadžbi 5 i 6, na osnovi slike 2:

$$\sigma_n = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta \quad (7)$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \quad (8)$$

Na sličan način se dobiva i posmično naprezanje τ_n na plohu AB, tj. zbrajanjem jedn. 5 i 6 u sljedeći izraz:

$$\tau_n = P_y \cos \theta - P_x \sin \theta \quad (9)$$

$$\tau_n = 1/2(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (10)$$

(gdje je $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$; i $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$)

U prikazanom polju naprezanja postoje ortogonalne orijentacije normalnih naprezanja u kojima su posmična naprezanja jednaka nuli. Smjerovi naprezanja u kojima su posmična naprezanja nula nazivaju se **smjerovima (osima) glavnih naprezanja**. U dvodimenzionalnom slučaju glavna naprezanja se označavaju kao σ_1 i σ_2 , pri čemu je $\sigma_1 > \sigma_2$. Vrijednosti σ_1 i σ_2 mogu se izračunati prema sljedećem izrazu:

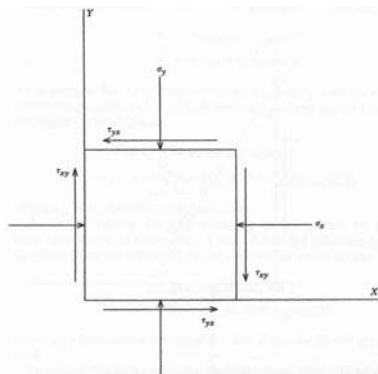
$$\sigma_1 = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) + 1/2((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (11)$$

$$\sigma_2 = 1/2(\sigma_x + \sigma_y) - 1/2((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (12)$$

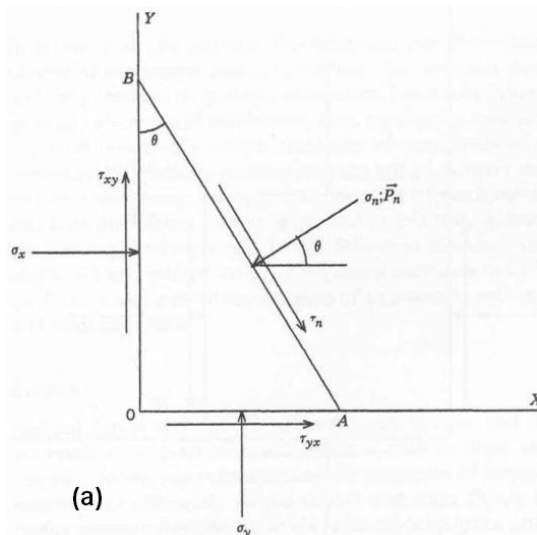
U analizi naprezanja uobičajeno je osi X i Y staviti u smjeru glavnih naprezanja σ_1 i σ_2 , tako da jednadžbe 8 i 10 postaju:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) + 1/2(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (13)$$

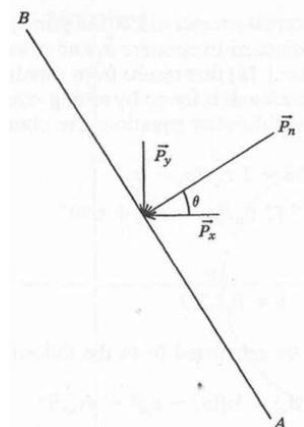
$$\tau_n = -1/2(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (14)$$



Tlačna i posmična naprezanja koja djeluju na jednu plohu kocke, promatrana u ravnini XY. Polje naprezanja koje djeluje na kosu plohu tijela zanemarive debljine.



(a)



(b)

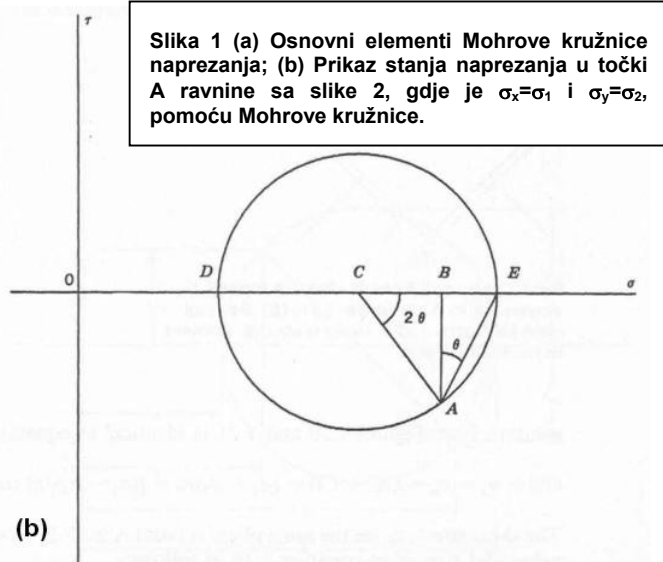
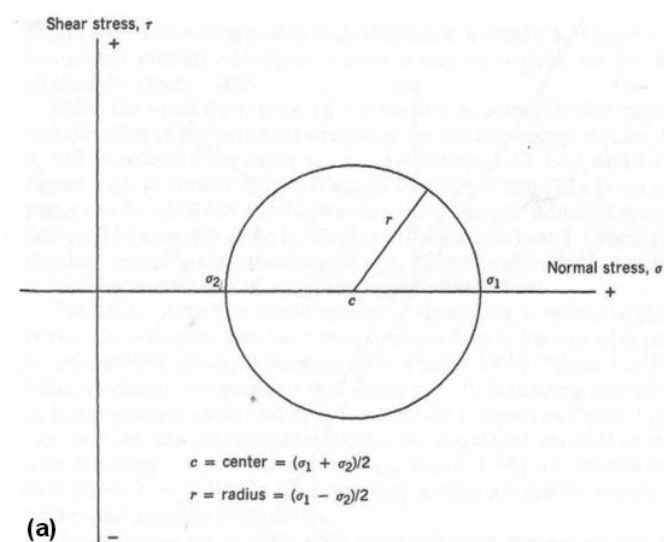
MOHROVA KRUŽNICA NAPREZANJA

Mohrova kružnica naprezanja – grafički prikaz stanja naprezanja u točki tijela. Ona se prikazuje u dijagramu čije osi su komponente naprezanja σ i τ . Kod dvodimenzionalne analize stanja naprezanja prikazuju se **glavne osi σ_1 i σ_2** . Pomoću kružnice se određuju koordinatne vrijednosti σ_n i τ_n za točke u ravnini definiranoj kutom θ . Dvije krajnje vrijednosti σ_n , kada je $\tau_n = 0$ su σ_1 i σ_2 . Centar i radijus kružnice definirani su izrazima $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ i $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ iz jednadžbi 13 i 14 (slika 3a). Prikaz polja naprezanja

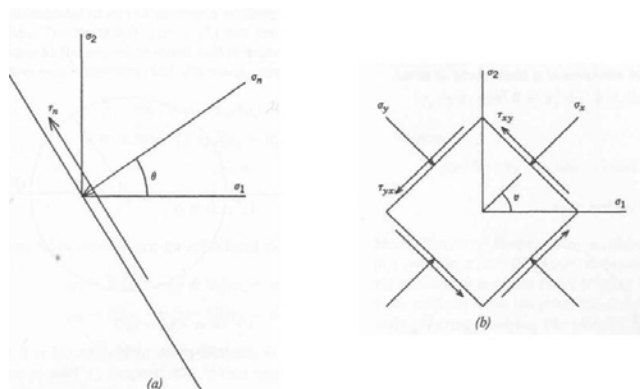
pomoću Mohrove kružnice i stanje naprezanja u točki iz primjera sa slike 2, dani su na slici 3b.

Točke D i E su glavna naprezanja σ_1 i σ_2 , pri čemu je uvijek $\sigma_1 > \sigma_2$ (prema konvenciji). Točka C (u centru kružnice) je iznos srednjeg naprezanja, od kojega se razlikuju sva normalna naprezanja, ovisno o kutu θ .

Veličina OB je vrijednost normalnog naprezanja σ_n koje djeluje na ravninu pod kutom θ u odnosu na σ_1 (slika 4a). Sva normalna i posmična naprezanja koja djeluju u točki elementa kvadratnog oblika prikazana su na slici 4b.

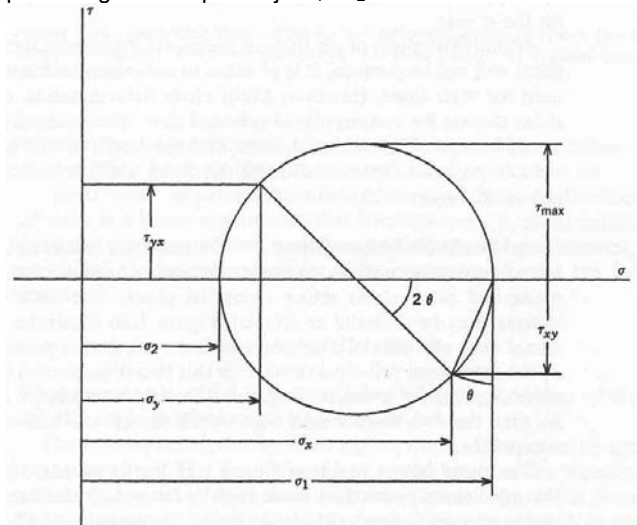


Slika 1 (a) Osnovni elementi Mohrove kružnice naprezanja; (b) Prikaz stanja naprezanja u točki A ravnine sa slike 2, gdje je $\sigma_x = \sigma_1$ i $\sigma_y = \sigma_2$, pomoću Mohrove kružnice.



Slika 2 (a) Stanje naprezanja u točki A sa slike 3; (b) Opći slučaj slike 4a, s prikazom svih naprezanja.

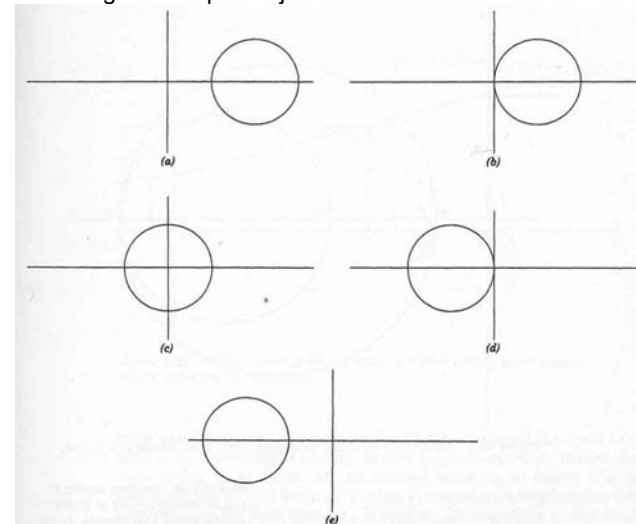
Pomoću Mohrove kružnice (slučaj 1) moguće je odrediti magnitudu i smjerove glavnih naprezanja, na temelju poznatih normalnih naprezanja (σ_x i σ_y) i posmičnih naprezanja (τ_{xy}) u nekoj točki (prema jednadžbama 11 i 12 i slici 5). Primjer prikazan na slici 6. Na sličan način (slučaj 2), stanje naprezanja u točki bilo koje ravnine može se dobiti konstrukcijom, koristeći Mohrovu kružnicu, ako su poznata glavna naprezanja σ_1 i σ_2 .



Slika 3 Mohrova kružnica - stanje naprezanja

U do sada obrađivanim primjerima korištena su **pozitivna ili tlačna glavna naprezanja** (kao što je ono prikazano na slici 7a). Na slici 7 prikazani su i ostali primjeri različitih stanja naprezanja: 7b - **jednoosno tlačno naprezanje**, gdje je $\sigma_2 = 0$; 7c - σ_1 je tlačno naprezanje, a σ_2 vlačno

naprezanje (!!! prema konvenciji, u inženjerstvu su tlačna naprezanja pozitivna, vlačna negativna); na ovoj slici je prikazano stanje naprezanja čistog smicanja (eng. pure shear), jer su glavna naprezanja jednaka i suprotnog smjera; 7d- **jednoosno vlačno naprezanje**, gdje je $\sigma_1 = 0$; 7e- oba glavna naprezanja su vlačna.



Slika 4 Idealizirane Mohrove kružnice za sljedeća stanja naprezanja: (a) troosna kompresija; (b) jednoosna kompresija; (c) čisto smicanje (eng. pure shear); (d) jednoosni vlak; (e) troosni vlak

Posmična naprezanja su moguća samo onda kada su glavna naprezanja različita. Ukoliko su glavna naprezanja različita, radi se o **deviatorskim naprezanjima**, za razliku od **hidrostatskog naprezanja**, kod kojega su glavna naprezanja jednaka. Kod hidrostatskog stanja naprezanja nema posmičnih naprezanja, neovisno o orijentaciji ravnine u odnosu na osi glavnih naprezanja. Hidrostatsko stanje naprezanja nema Mohrovu kružnicu, jer je njegov prikaz točka na dijagramu, koja se nalazi na σ osi.

Mohrova kružnica se također koristi i za trodimenzionalno stanje naprezanja (troosno ili triaksijalno).