

MATEMATIKA 2

1. ZADACI ZA VJEŽBU

Izračunajte sljedeće integrale:

- 1.) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$
- 2.) $\int_0^{16} \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^2}$
- 3.) $\int_6^9 \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$
- 4.) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$
- 5.) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$
- 6.) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2} dx$
- 7.) $\int_1^2 x\sqrt{x^4+2x^2-1} dx$
- 8.) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$
- 9.) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 10.) $\int_1^2 x^2 e^{x^3-1} dx$
- 11.) $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$
- 12.) $\int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln(x^2) dx$
- 13.) $\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$

$$14.) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$15.) \int_1^{e^{\frac{1}{5}}} \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$$

$$16.) \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{3}} x \sin(3x^2) \, dx$$

$$17.) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$$

$$18.) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 3x \cos x \, dx$$

$$19.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1+\cos^2 x) \, dx$$

$$20.) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^2 x}$$

$$21.) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \, dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$22.) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$23.) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x \, dx}{\sqrt{2-\sin^4 x}}$$

$$24.) \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$25.) \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$26.) \int_2^{2e} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$$

Rješenja:

- 1.) $4 - 2 \ln 3$ 2.) $12 \ln 3 - \frac{32}{3}$ 3.) $\frac{\pi}{18}$ 4.) $2 + 4 \ln \frac{3}{2}$ 5.) $\frac{98}{3}$ 6.) $\frac{7}{3}$ 7.) $\frac{5\sqrt{23}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{5+\sqrt{23}}$ 8.) $\ln \frac{4}{3}$ 9.) $\frac{\pi^2}{24}$ 10.) $\frac{1}{3}(e^7 - 1)$ 11.) $\frac{e^2+3}{8}$ 12.) 1
 13.) $\frac{10}{3}$ 14.) 2 15.) $\frac{3}{5} - 2(\arcsin \frac{11\sqrt{5}}{25} - \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5})$ 16.) $\frac{1}{12}$ 17.) 1 18.) $(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4})\pi + \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$ 19.) $\frac{4}{3}$ 20.) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$ 21.) $\frac{8}{5} - \frac{19\sqrt{2}}{20}$ 22.) $\sqrt{2} - 1$
 23.) $\frac{\pi}{8}$ 24.) $\frac{e^{\pi+1}}{2}$ 25.) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ 26.) 2

2. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(a) $y = 2x - x^2, y = -x$

(b) $y^2 = 4x, 4x - 5y + 4 = 0$

(c) $x = (y - 3)^2, y = 2x$

(d) $y^2 = x + 3, y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(e) $y = x^2 + 5, y = 2x^2 + 1$

(f) $y^2 = -x + 4, y = -\frac{1}{2}x + 2$

(g) $y = \frac{1}{x}, y = 4x, y = 1$

(h) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{1}{x^2 + 1}$

(i) $y^3 = x, y = 1, x = 8$

(j) $y = x^3, y = 8, x = 0$

(k) $y = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$

(l) $y = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, x = 0, x = 1, y = 0$

(m) $y = 1 + \sqrt{x}, y = \frac{1}{3}x + 1$

Rješenja:

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{9}{8}$ (c) $\frac{125}{48}$ (d) $\frac{4}{3}$ (e) $\frac{32}{3}$ (f) $\frac{4}{3}$ (g) $\ln 2 - \frac{3}{8}$ (h) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (i) $\frac{17}{4}$ (j) 12 (k) $\ln 2$ (l) $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$ (m) $\frac{9}{2}$

2.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom:

(a) $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\begin{cases} x(t) = \cos t + 2 \sin t \\ y(t) = 2 \cos t - \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Rješenja:

(a) $ab\pi$ (b) 5π (c) $\frac{3}{8}a^2\pi$

3.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom:

$$(a) r = \frac{2}{\varphi}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$(b) r = \sin(3\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

$$(c) r = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$(d) r = \operatorname{tg} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(e) r = 3 + 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$(f) r = a(1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Rješenja:

$$(a) \frac{7}{\pi} \quad (b) \frac{\pi}{6} \quad (c) \frac{3\pi}{8} \quad (d) \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (e) \frac{11\pi}{2} \quad (f) \frac{3}{2}a^2\pi$$

3. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln(\sin(x-1))$ od $x = 1 + \frac{\pi}{3}$ do $x = 1 + \frac{2\pi}{3}$.

2.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = 2 \ln\left(\cos \frac{x}{2}\right)$ od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{3}$.

3.) Izračunajte duljinu luka koji na krivulji $x^2 = 2y + 1$ odsijeca pravac $y = x + 1$.

4.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = e^x$ od $x = 0$ do $x = 1$.

5.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = x^{\frac{3}{2}}$ od $x = 0$ do $x = 4$.

6.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ od $x = 0$ do $x = 1$.

7.) Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ od $x = 0$ do $x = \frac{1}{2}$.

8.) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x(t) = \frac{t^6}{6} \\ y(t) = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ između sjecišta s koordinatnim osima.

9.) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y(t) = t^2 + 2 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 3$.

10.) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi$.

11.) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

12.) Izračunajte duljinu luka krivulje $\begin{cases} x(t) = 3\left(\cos t + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)\right) \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$.

13.) Izračunajte duljinu luka kružnice $r = a \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

14.) Izračunajte duljinu luka kardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

- 15.) Izračunajte duljinu luka krivulje $r = a \sin^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right)$, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$.
- 16.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2 + 1$ i $y = x + 3$ oko osi x .
- 17.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = 2x^2$ i $y = -x^2 + 6x$ oko osi x .
- 18.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y^2 = 4x$ i $y = x$ oko osi x .
- 19.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y^2 = 9x$ i $y = 3x$ oko osi y .
- 20.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^4$ i $y = 1$ oko osi y .
- 21.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = e^{-2x}$, $y = e^4$ i $x = 0$ oko osi x .
- 22.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ i $y = \frac{1}{4}$ oko osi x .
- 23.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ i $y = 0$ oko osi x .
- 24.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom kruga $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$ oko osi x .
- 25.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = \sin^2 x$ i segmentom $[0, \pi]$ oko osi x .

Rješenja:

- 1.) $\ln 3$ 2.) $\ln 3$ 3.) $\frac{1}{2}(3\sqrt{10} + \sqrt{2} + \ln \frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1})$ 4.) $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln[(\sqrt{1+e^2}-1)(1+\sqrt{2})]$ 5.) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ 6.) 2 7.) $-\frac{1}{2} + \ln 3$ 8.) $\frac{13}{3}$ 9.) 12 10.) $\frac{\pi^2}{2}$ 11.) 16 12.) $3 \ln \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 13.) $2a\pi$ 14.) $8a$ 15.) $\frac{3}{2}a\pi$ 16.) 23.4π 17.) 28.8π 18.) $\frac{32}{3}\pi$ 19.) $\frac{2}{5}\pi$ 20.) $\frac{2}{3}\pi$ 21.) $\frac{\pi}{4}(7e^8 + 1)$ 22.) $\frac{9}{16}\pi$ 23.) $\frac{5}{6}\pi$ 24.) $4\pi^2$ 25.) $\frac{3}{8}\pi^2$

4. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Dani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + \alpha\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je vektor $\vec{a} + \vec{b}$ okomit na vektor $\vec{b} \times \vec{c}$.

2.) Dani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{c} = \beta\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
Odredite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{c}$ i $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{c})$.

3.) Odredite parametre $\alpha > 0$, $\beta < 0$, tako da vektor $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ bude okomit na vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i da je $|\vec{b}| = 7$.

4.) Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ komplanarni, te zatim vektor \vec{c} prikažite kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .

5.) Dani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.
Odredite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je vektor \vec{a} okomit na vektor \vec{b} , a vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

6.) Dani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
Prikažite vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$.

7.) Odredite kut koji zatvaraju jedinični vektori \vec{m} i \vec{n} ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno okomiti.

8.) Odredite kut koji zatvaraju vektori \vec{m} i \vec{n} ako je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 3$, te ako su vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$ međusobno okomiti.

9.) Ako je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$, odredite parametar $t \in \mathbb{R}$ za koji su vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{b} = t\vec{m} + 5\vec{n}$ međusobno okomiti.

10.) Izračunajte skalarni produkt vektora $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

11.) Izračunajte duljinu vektora $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

12.) Dani su vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ i $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$, gdje je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Koji od vektora \vec{a} i \vec{b} ima veću duljinu?

13.) Ako je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$, nađite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je skalarni produkt vektora $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} + \alpha\vec{n}$ jednak 18. Izračunajte duljinu vektora \vec{b} .

14.) Dani su vektori $\vec{a} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$ i $\vec{b} = -3\vec{m} + \vec{n}$, gdje je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte duljine vektora $\vec{a} + 3\vec{b}$ i $\vec{a} \times 3\vec{b}$.

15.) Dani su vektori $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Izračunajte površinu trokuta ABC .

16.) Dani su vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{m} + 5\vec{n}$, pri čemu je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte površinu trokuta ABC i visinu na stranicu \overline{AB} .

17.) Izračunajte površinu paralelograma konstruiranog nad vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Koliko iznosi visina na stranicu \overline{AC} ?

18.) Izračunajte površinu paralelograma konstruiranog nad vektorima $\overrightarrow{AB} = \vec{m} - 3\vec{n}$ i $\overrightarrow{AC} = 5\vec{m} + \vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Koliko iznosi visina na stranicu \overline{AB} ?

19.) Neka je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$. Nađite realni broj $\alpha > 0$ tako da površina paralelograma konstruiranog nad vektorima $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} + \alpha\vec{n}$ iznosi 8. Izračunajte duljinu vektora $\vec{a} - 3\vec{b}$.

20.) Izračunajte volumen paralelopipeda konstruiranog nad vektorima $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, te visinu na stranicu razapetu vektorima \vec{a} i \vec{b} .

Rješenja

1.) $\alpha = -\frac{11}{9}$ 2.) $\alpha = -\frac{5}{6}$, $\beta = -\frac{16}{3}$ 3.) $\alpha = 6$, $\beta = -2$ 4.) $\alpha = 21$, $\vec{c} = -\frac{11}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 5.) $\alpha = -10$, $\beta = -\frac{47}{7}$ 6.) $\vec{c} = -\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{a} \times \vec{b}$ 7.) $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ 8.) $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ 9.) $t = \frac{5}{2}$ 10.) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{73}{2}$ 11.) $|\vec{a}| = 6$ 12.) \vec{a} 13.) $\alpha = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{21}$ 14.) $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|\vec{a} \times 3\vec{b}| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 15.) $P = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ 16.) $P = 2\sqrt{3}$, $v = 4$ 17.) $P = 6\sqrt{13}$, $v = \frac{6\sqrt{13}}{\sqrt{38}}$ 18.) $P = 16\sqrt{3}$, $v = \frac{16\sqrt{21}}{7}$ 19.) $\alpha = 3$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 16$ 20.) $V = 2$, $v = \frac{2\sqrt{35}}{35}$

5. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Nađite jedinični vektor okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2.) Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(2, -6, 3)$, a paralelna je s ravninom koja prolazi točkama $A(2, 1, 5)$, $B(0, 4, -1)$ i $C(3, 4, -7)$.

3.) Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(2, -5, 1)$ i $B(-3, 1, 4)$, a okomita je na ravninu $x + 3y - z + 7 = 0$.

4.) Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(1, -2, 5)$, a okomita je na ravnine $2x + 3y - z + 1 = 0$ i $4x - y + 5z - 11 = 0$.

5.) Točkom $T(1, -1, 2)$ položite ravninu koja je okomita na ravnine $x - y + 3z - 1 = 0$ i $2x + y - z + 2 = 0$, te nađite udaljenost te ravnine od točke $A(3, 5, 4)$.

6.) Nađite kut između ravnine koja prolazi točkama $A(0, 0, 0)$, $B(2, -2, 0)$, $C(2, 2, 2)$ i XOY ravnine.

7.) Nađite projekciju točke $T(2, 3, -5)$ na ravninu $2x - y - 4z = 0$.

8.) Nađite točku simetričnu točki $T(6, -4, 5)$ s obzirom na ravninu $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

9.) Napišite jednadžbe pravaca

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

u kanonskom obliku, te nađite kut između njih.

10.) Kroz točku $T(1, -2, 1)$ povucite pravac paralelan pravcu

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

11.) Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da se pravci $\frac{x-2}{\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$ i $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ sijeku, te zatim nađite točku presjeka.

12.) Nađite jednadžbu pravca koji prolazi sjecištem pravaca $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$ i $\frac{x-7}{5} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-11}{3}$ i okomit je na svaki od njih.

13.) Nađite udaljenost točke $T(4, -3, 1)$ od pravca $\frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

14.) Nađite udaljenost točke $T(1, -2, 3)$ od pravca $\begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 4 - 4t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$,

$t \in \mathbb{R}$.

15.) Nađite udaljenost između pravaca $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$ i $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+2}{2}$.

16.) Nađite projekciju točke $T(-2, 3, 2)$ na pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{5} = \frac{z+1}{-2}$.

17.) Nađite točku simetričnu točki $T(4, 3, 10)$ s obzirom na pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

18.) Nađite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da ravnina $\alpha x + \beta y + z + 1 = 0$ sadrži pravac $x - 1 = y - 2 = z - 3$.

19.) Pokažite da se pravci $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$ i $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{0}$ sijeku i nađite jednadžbu ravnine koja ih sadrži.

20.) Kroz presjek pravca $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-4}$ i ravnine $3x + 2y + z + 15 = 0$ postavite ravninu paralelnu s ravninom $2x - 2y - 3z + 7 = 0$.

21.) Kroz presjek pravaca $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-4}{1}$ i $\frac{x-1}{3} = \frac{y+13}{2} = \frac{z}{3}$ postavite ravninu paralelnu s ravninom $2x - y - 3z + 11 = 0$.

22.) Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$ i paralelna je s pravcem $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-6}{3}$.

23.) Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ i okomita je na ravninu $x - 4y + 2z - 15 = 0$.

24.) Nađite jednadžbu projekcije pravca $\frac{x}{8} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$ na ravninu $2x + y + 4z - 16 = 0$.

25.) Nađite jednadžbu projekcije pravca $\begin{cases} 4x - y + 3z - 6 = 0 \\ x + 5y - z + 10 = 0 \end{cases}$ na ravninu $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Rješenja

- 1.) $\vec{n} = \pm(\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{k})$ 2.) $6x + 10y + 3z + 39 = 0$ 3.) $15x + 2y + 21z - 41 = 0$ 4.) $x - y - z + 2 = 0$ 5.) $2x - 7y - 3z - 3 = 0$; $\frac{22\sqrt{62}}{31}$
 6.) 35.26° 7.) $(0, 4, -1)$ 8.) $(0, 8, 1)$ 9.) $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{6}$;
 17.75° 10.) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$ 11.) $\lambda = -\frac{1}{2}$; $(3, -1, 2)$ 12.) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-8}{1}$ 13.) $\sqrt{10}$ 14.) 10 15.) $\frac{5\sqrt{266}}{14}$ 16.) $(-1, 2, 1)$ 17.) $(2, 9, 6)$ 18.) $\alpha = 2$,
 $\beta = -3$ 19.) $x - 2y - 7z + 19 = 0$ 20.) $2x - 2y - 3z - 10 = 0$ 21.) $2x - y - 3z - 5 = 0$ 22.) $10x + 11y + 8z - 15 = 0$ 23.) $8x - 7y - 18z - 19 = 0$
 24.) $\begin{cases} x - 6y + z - 5 = 0 \\ 2x + y + 4z - 16 = 0 \end{cases}$ 25.) $\begin{cases} 7x + 14y + 24 = 0 \\ 2x - y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$

6. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Pokažite da za funkciju $f(x, y) = x^2y + xe^{\frac{y}{x}}$ vrijedi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y)$.

2.) Pokažite da za funkciju $f(x, y) = \operatorname{arctg}(2x - y)$ vrijedi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

3.) Pokažite da za funkciju $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$.

4.) Pokažite da za funkciju $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$ vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

5.) Pokažite da za funkciju $f(x, y) = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$ vrijedi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}$.

6.) Ispitajte s obzirom na ekstreme sljedeće funkcije:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 3)^2$
- (b) $f(x, y) = (x + y)^2 - (x + 5y + xy)$
- (c) $f(x, y) = 4x^2 - 2xy - 2x + y^3$
- (d) $f(x, y) = x^3 - x^2y - x^2 + y^2$
- (e) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
- (f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 1$
- (g) $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$
- (h) $f(x, y) = (x + y)^3 - 3xy - 2y^2$
- (i) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ($x > 0, y < 0$)
- (j) $f(x, y) = (x - y)^3 + x^4 + y^4$ ($x < 0, y > 0$)
- (k) $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ ($x > 0, y > 0$)
- (l) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
- (m) $f(x, y) = 3x^2 - 12x\sqrt{y} + y\sqrt{y}$
- (n) $f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$
- (o) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$
- (p) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$
- (r) $f(x, y) = e^{x^2-2xy+4y}$

Rješenja

(a) $T_{\min}(-1, -1)$ (b) $T_{\min}(-1, 3)$ (c) $T_{\min}(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ (d) $T_{\min}(1, \frac{1}{2})$ (e) $T_{\min}(5, 6)$ (f) $T_{\min}(1, 1), T_{\max}(-1, -1)$ (g) $T_{\min}(6, 6)$ (h) $T_{\min}(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ (i) $T_{\min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (j) $T_{\min}(-3, 3)$ (k) $T_{\max}(3, 2)$ (l) $T_{\max}(4, 4)$ (m) $T_{\min}(16, 64)$ (n) nema ekstrema (o) $T_{\min}(-2, 0)$ (p) $T_{\max}(0, 0)$ (r) nema ekstrema

7. ZADACI ZA VJEŽBU

- 1.) Odredite granice u integralu $\iint_S f(x, y) dx dy$, ako je područje S omeđeno krivuljama $y^2 = 8x$, $y = 2x$ i $y + 4x - 24 = 0$.
- 2.) Izračunajte $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+2y)^2}$.
- 3.) Izračunajte $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx \int_0^{x^2} x \cos y dy$.
- 4.) Izračunajte $\int_1^e dx \int_{1-2x}^x \frac{dy}{2x+y}$.
- 5.) Izračunajte $\iint_S x \sin(x+y) dx dy$, gdje je $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.
- 6.) Izračunajte $\iint_S \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$, gdje je S pravokutnik s vrhovima $A(3, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 2)$.
- 7.) Izračunajte $\iint_S (x+2y) dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = 4 - 2x$.
- 8.) Izračunajte $\iint_S (x+2y) dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y^2 = x + 4$ i $x = 5$.
- 9.) Izračunajte $\iint_S \cos x dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y = x^2$, $y = -x + 2$ i osi x .
- 10.) Izračunajte $\iint_S xy^2 dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y^2 = 2x$ i $x = 1$.
- 11.) Izračunajte $\iint_S ye^x dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y^2 = x$, $y = -x + 6$ i osi x .
- 12.) Izračunajte $\iint_S (x^2 + y) dx dy$, gdje je S područje omeđeno krivuljama $y = x^2$ i $x = y^2$.
- 13.) Izračunajte $\iint_S x^3 y^3 dx dy$, gdje je S četvrtina kruga $x^2 + y^2 = 1$ u prvom kvadrantu.
- 14.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} f(x, y) dy$.
- 15.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy$.
- 16.) Promijenite poredak integracije u $\int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x, y) dy$.
- 17.) Promijenite poredak integracije u $\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$.
- 18.) Promijenite poredak integracije u $\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x, y) dy$.
- 19.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
- 20.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x, y) dx$.

21.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^2 dy \int_0^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$.

22.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^2 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$.

23.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$.

24.) Promijenite poredak integracije u $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$.

Rješenja

- 1.) $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{8x}}^{2x} f(x, y) dy + \int_{\frac{9}{2}} dx \int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} f(x, y) dy +$
 $\int_{\frac{9}{2}}^8 dx \int_{-\sqrt{8x}}^{-4x+24} f(x, y) dy$ 2.) $\frac{1}{2} \ln \frac{21}{20}$ 3.) $\frac{1}{2}$ 4.) $(e-1) \ln 3 + 1$ 5.) $\pi - 2$ 6.)
 $\ln \frac{25}{24}$ 7.) $\frac{116}{15}$ 8.) $50, 4$ 9.) $3 \cos 1 - \cos 2 - 2 \sin 1$ 10.) $\frac{8\sqrt{2}}{21}$ 11.) $-\frac{7}{2}e^4 + e^6 +$
 $\frac{1}{2}$ 12.) $\frac{33}{140}$ 13.) $\frac{1}{96}$ 14.) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ 15.)
 $\int_{e^{-1}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx$ 16.) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx +$
 $\int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx$ 17.) $\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^2 f(x, y) dx$
 18.) $\int_{-1}^0 dy \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ 19.) $\int_{\frac{1}{2}} dy \int_{1-\sqrt{2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx +$
 $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ 20.) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} f(x, y) dy$
 21.) $\int_0^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$
 22.) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^2 f(x, y) dy$ 23.) $\int_{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy +$
 $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy$ 24.) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x, y) dx$

8. ZADACI ZA VJEŽBU

- 1.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2x$, $y = -x$, $y = x$.
- 2.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y^2 = x$, $x + y = 2$, $x = 4$.
- 3.) Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x + y + z = 8$, $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$.
- 4.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $z = 0$.
- 5.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- 6.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x + z = 1$, $z = 0$.
- 7.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 4x$, $x + y + z = 6$, $z = 0$.
- 8.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 2y$, $x + z = 3$, $z = 0$.
- 9.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$, $z = 5 - x - y$, $z = 0$.
- 10.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 16$, $z = 2x^2$, $z = 0$.
- 11.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ (izvan valjka).
- 12.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $4z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (izvan valjka).
- 13.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohom $z = 4x^2$ i ravninama $2x + 3y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.
- 14.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = 3x^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- 15.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
- 16.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 4$, $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$, $z = 0$.
- 17.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + 4y + 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
- 18.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

19.) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

Rješenja

1.) $\frac{\pi}{2} + 1$ 2.) $\frac{37}{6}$ 3.) $\frac{4}{3}$ 4.) $\frac{256}{21}$ 5.) $\frac{5\pi}{4} - \frac{2}{3}$ 6.) 2π 7.) 16π 8.) 3π 9.) 3π
10.) 128π 11.) $4\sqrt{3}\pi$ 12.) 18π 13.) 18 14.) $\frac{243}{16}\pi$ 15.) 4π 16.) 20π 17.)
 40π 18.) 10 19.) $(1 - e^{-4})\pi$

9. ZADACI ZA VJEŽBU

1.) Čestica se giba po krivulji s vektorom položaja $\vec{r}(t) = (3t^2 + 2) \sin t \vec{i} + (t^3 - 5) \cos t \vec{j} + te^{3t} \vec{k}$. Izračunajte brzinu i ubrzanje čestice u trenucima $t = 0$ i $t = \frac{\pi}{2}$.

2.) Čestica se giba po krivulji s vektorom položaja $\vec{r}(t) = t^2 \sin t \vec{i} + t^2 \cos t \vec{j} + \sqrt{2t} e^{5t} \vec{k}$. Izračunajte brzinu i ubrzanje čestice u trenutku $t = \pi$.

3.) Čestica se giba po krivulji s vektorom položaja $\vec{r}(t) = t \sin(2t^2 + 3) \vec{i} + t \cos(2t^2 + 3) \vec{j} + e^{3t^2+2} \vec{k}$. Izračunajte brzinu i ubrzanje čestice u trenutku $t = 0$.

4.) Čestica se giba po krivulji s vektorom položaja $\vec{r}(t) = \ln(t^3) \vec{i} + te^{3t} \vec{j} + \sqrt{\sin t} \vec{k}$. Izračunajte brzinu i ubrzanje čestice u trenutku $t = \frac{\pi}{2}$.

5.) Nađite smjer najbržeg rasta polja $f(x, y, z) = (x+2y) \ln(xz) + \frac{1}{z} e^x$ u točki $T(1, 2, 1)$.

6.) Nađite smjer najbržeg rasta polja $f(x, y, z) = x^2 \sin(x + 3y + 5z) + ye^{xz}$ u točki $T(2, 1, -1)$.

7.) Nađite smjer najbržeg pada polja $f(x, y, z) = \sqrt{x^3 z + y} + 3x^2 y \sin(2xz + 1) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} z$ u točki $T(0, 1, 2)$.

8.) Nađite smjer najbržeg pada polja $f(x, y, z) = \ln(x^2 - z) + \frac{x+3y}{y^2+z^2} + ye^{5x}$ u točki $T(0, 1, -1)$.

9.) Nađite derivaciju funkcije $f(x, y, z) = \cos^2(3xy) - z \ln(x + yz^2)$ u točki $T(0, 1, 2)$ u smjeru vektora $\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

10.) Nađite derivaciju funkcije $f(x, y, z) = 2x \ln \frac{x}{y} + \arctg(z + x^2) - \sin^3 z$ u točki $T(2, 2, 0)$ u smjeru vektora $\vec{a} = -\vec{j} + 17\vec{k}$.

11.) Nađite derivaciju funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y} + y^2 \sin(xz)$ u točki $T(1, 4, \pi)$ u smjeru vektora $\vec{a} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

12.) Nađite derivaciju funkcije $f(x, y, z) = \ln(x\sqrt{y}) + x^2 \sin(y^3 z) + 5\sqrt{x^2 z + 2} - 4z^3$ u točki $T(2, 1, 0)$ u smjeru vektora $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$.

13.) Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = \sin(xy^2 - 5y) + \frac{x}{(x+y)^2}$ u točki $T(1, 0, z_0)$.

14.) Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = 3xye^{-\frac{x}{y}} + \ln(x + y) + \cos x$ u točki $T(0, 1, z_0)$.

15.) Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = e^{x+3y} + \arctg(xy + x)$ u točki $T(2, -1, z_0)$.

16.) Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = \arctg \frac{3x}{x+y}$ u točki $T(1, 2, z_0)$.

17.) Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = \sqrt{x^2 + 3y^2} + e^{x-y}$ u točki $T(2, 2, z_0)$.

18.) Na plohu $z = 4 - x^2 - y^2$ postavite tangencijalnu ravninu paralelnu s ravninom $2x + 2y + z = 0$.

19.) Na plohu $-2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ postavite tangencijalne ravnine paralelne s ravninom $-4x + 6y + \sqrt{2}z = 9$.

20.) Na ploh $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ nađite točke u kojima su tangencijalne ravnine paralelne s ravninom $x = 0$.

Rješenja

- 1.) $\vec{v}(0) = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{a}(0) = 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v}(\frac{\pi}{2}) = 3\pi\vec{i} + (5 - \frac{\pi^3}{8})\vec{j} + (1 + \frac{3\pi}{2})e^{\frac{3\pi}{2}}\vec{k}$,
 $\vec{a}(\frac{\pi}{2}) = (4 - \frac{3\pi^2}{4})\vec{i} - \frac{3\pi^2}{2}\vec{j} + 3(2 + \frac{3\pi}{2})e^{\frac{3\pi}{2}}\vec{k}$ 2.) $\vec{v}(\pi) = -\pi^2\vec{i} - 2\pi\vec{j} + (\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} + 5\sqrt{2\pi})e^{5\pi}\vec{k}$, $\vec{a}(\pi) = -4\pi\vec{i} + (\pi^2 - 2)\vec{j} + (25\sqrt{2\pi} + \frac{5\sqrt{2\pi}}{\pi} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi^2})e^{5\pi}\vec{k}$ 3.)
 $\vec{v}(0) = \sin 3\vec{i} + \cos 3\vec{j}$, $\vec{a}(0) = 6e^2\vec{k}$ 4.) $\vec{v}(\frac{\pi}{2}) = \frac{6}{\pi}\vec{i} + (1 + \frac{3\pi}{2})e^{\frac{3\pi}{2}}\vec{j}$,
 $\vec{a}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{12}{\pi^2}\vec{i} + (6 + \frac{9\pi}{2})e^{\frac{3\pi}{2}}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ 5.) $\overrightarrow{\text{grad}}f(T) = (5 + e)\vec{i} + (5 - e)\vec{k}$ 6.)
 $\overrightarrow{\text{grad}}f(T) = (4 - e^{-2})\vec{i} + (12 + e^{-2})\vec{j} + (20 + 2e^{-2})\vec{k}$ 7.) $-\overrightarrow{\text{grad}}f(T) = -\frac{5}{2}\vec{j} + \vec{k}$ 8.)
 $-\overrightarrow{\text{grad}}f(T) = -\frac{11}{2}\vec{i} - \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ 9.) $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(T) = \frac{7+2\ln 4}{3}$ 10.)
 $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(T) = \frac{3\sqrt{290}}{290}$ 11.) $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(T) = -\frac{63}{5}$ 12.) $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(T) = 2\sqrt{2} + 5$ 13.) $x + 7y + z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{1}$ 14.) $4x + y - z = 0$, $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 15.)
 $x + (2e+3)y - ez + 2e + 2 = 0$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2e+3} = \frac{z-\frac{1}{e}}{-e}$ 16.) $2x - y - 6z + \frac{3\pi}{2} = 0$,
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{-6}$ 17.) $3x + y - 2z + 2 = 0$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-2}$ 18.)
 $2x + 2y + z - 6 = 0$ 19.) $4x - 6y - \sqrt{2}z - 6 = 0$, $4x - 6y - \sqrt{2}z + 6 = 0$
20.) $T_1(-5, 3, -2)$, $T_2(5, 3, -2)$

10. ZADACI ZA VJEŽBU

Riješite sljedeće diferencijalne jednačbe:

- 1.) $2x^2yy' + y^2 = 2$
- 2.) $x^2dy - (2xy + 3)dx = 0$
- 3.) $e^ydx + (xe^y - 2y)dy = 0$
- 4.) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$
- 5.) $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x}dy = 0$
- 6.) $y' - 3x^2y = (x \ln x + 1)e^{x^3}$
- 7.) $3x^2(1 + \ln y)dx + (\frac{x^3}{y} - 2y)dy = 0$
- 8.) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$
- 9.) $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$
- 10.) $xy' + (x + 1)y = x^2e^{-x}$
- 11.) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
- 12.) $y' - xy^2 = 2xy$
- 13.) $\frac{y-xy'}{x+yy'} = 2$
- 14.) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, uz početni uvjet $y(0) = 2$
- 15.) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$
- 16.) $2x(x^2 + y)dx = dy$
- 17.) $y' + \frac{y}{x+5} = \sin x$, uz početni uvjet $y(0) = 1$
- 18.) $(\frac{y}{x^2+y^2} - 1)dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$
- 19.) $2xyy' - y^2 + x = 0$
- 20.) $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
- 21.) $y' - 2xy = (x + 1)e^{x^2}$
- 22.) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$
- 23.) $(ye^x - 2x)dx + (e^x + y)dy = 0$, uz početni uvjet $y(0) = 2$
- 24.) $y = x(y' - x \cos x)$, uz početni uvjet $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$
- 25.) $x^2dy = (2xy - y^2)dx$
- 26.) $x^2y'' + xy' = 1$
- 27.) $yy'' + y'^2 = 0$
- 28.) $y'(1 + y'^2) = y''$
- 29.) $yy'' - y'(1 + y') = 0$
- 30.) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$, uz početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

Rješenja

- 1.) $y^2 = 2 - ce^{\frac{1}{x}}$ 2.) $y = -\frac{1}{x} + cx^2$ 3.) $xe^y - y^2 = c$ 4.) $x^2 + y^2 = cx$ 5.) $\sin \frac{y}{x} = -\ln|x| + c$ 6.) $y = e^{x^3}[\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + x + c]$ 7.) $x^3(1 + \ln y) - y^2 = c$ 8.) $y = \frac{1}{x(x+c)}$ 9.) $y = xe^{cx}$ 10.) $y = \frac{1}{3}x^2e^{-x} + c\frac{e^{-x}}{x}$ 11.) $\sin \frac{y}{x} = cx$ 12.) $y = \frac{2}{ce^{-x^2}-1}$ 13.) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = c$ 14.) $y = 2$ 15.) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 = c$ 16.) $y = -x^2 - 1 + ce^{x^2}$ 17.) $y = \frac{1}{x+5}[\sin x - (x+5)\cos x + 10]$ 18.) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - x = c$ 19.) $y^2 = x \ln \frac{c}{x}$ 20.) $y = xtg(\ln(cx))$ 21.) $y = e^{x^2}(\frac{x^2}{2} + x + c)$ 22.) $y \ln x + \frac{1}{4}y^4 = c$ 23.) $ye^x - x^2 + \frac{y^2}{2} = 4$ 24.) $y = x(\sin x + 1)$ 25.) $y = \frac{cx^2}{1+cx}$ 26.) $y = \frac{1}{2} \ln^2|x| + c_1 \ln|x| + c_2$ 27.) $y^2 = c_1x + c_2$ 28.) $\ln|\sin(y+c_1)| = x + c_2$ 29.) $y = c_2e^{c_1x} + \frac{1}{c_1}$ 30.) $y = x^3 + 3x$