10. Matematičko modeliranje

- Matematičko modeliranje ponašanja stijenske mase
- Teorijske osnove modela
  - Teorija elastičnosti
  - Teorija plastičnosti
  - Teorija blokova
- Metode proračuna
- Izbor modela i metode proračuna

Matematičko modeliranje ponašanja stijenske mase

- Predstavljanje određenih pojava, stanja i ponašanja matematičkim izrazima
- Modeli ponašanja
  - Mehanika kontinuuma
  - Mehanika diskontinuuma
- Metode proračuna
  - Analitičke metode
  - Numeričke
- Glavna okosnica pri projektiranju složenih zadataka kao i poveznica između empirijskog i osmatračkog pristupa u mehanici stijena

Teorija elastičnosti

- Dio matematičke fizike kojom se pokušavaju izraziti promjene stanja naprezanja i deformacija čvrstog, neprekinutog tijela
- Da bi se poznavalo ukupno stanje naprezanja u nekoj točki neprekinute sredine potrebno je poznavati devet komponenata naprezanja, od kojih σ_x, σ_y i σ_z predstavljaju normalna naprezanja, a τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} i τ_{zy} komponente posmičnih naprezanja na plohama diferencijalno male kockice
- Tenzor naprezanja

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Teorija elastičnosti

- Uvjet ravnoteže sila

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

- Uvjet ravnoteže momenata

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Teorija elastičnosti

- Relativne normalne deformacije

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Relativne posmične deformacije

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

- Tenzor deformacija

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Teorija elastičnosti

- Za slučaj neprekinute sredine, prema linearnoj teoriji elastičnosti, veze između komponenata naprezanja i komponenata deformacija ostvarene su preko linearnih funkcija u obliku polinoma uvođenjem fizikalnih svojstava materijala kao npr.

$$\sigma_x = C_{10} + C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\varepsilon_{xy} + C_{15}\varepsilon_{yz} + C_{16}\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_y = C_{20} + C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\varepsilon_{xy} + C_{25}\varepsilon_{yz} + C_{26}\varepsilon_{xz}$$

$$\ldots$$

$$\tau_{xz} = C_{60} + C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\varepsilon_{xy} + C_{65}\varepsilon_{yz} + C_{66}\varepsilon_{xz}$$

- Matrica koeficijenata sadrži ukupno 36 nepoznanica od kojih je za materijal potpune anizotropije potrebno poznavati 21

Teorija elastičnosti

- Materijal potpune izotropije, jednakih karakteristika u sva tri ortogonalna smjera, matrica koeficijenata izgleda:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

- Lameovi koeficijenti

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \qquad C_{12} = \lambda \qquad C_{44} = (C_{11} - C_{12}) = 2\mu$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Teorija elastičnosti

- Fizičke jednadžbe (I grupa)

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\cdot\varepsilon_x + \lambda\cdot(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad \tau_{xy} = 2\mu\cdot\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu)\cdot\varepsilon_y + \lambda\cdot(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \qquad \tau_{yz} = 2\mu\cdot\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\cdot\varepsilon_z + \lambda\cdot(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad \tau_{zx} = 2\mu\cdot\varepsilon_{zx}$$

- Fizičke jednadžbe (II grupa)

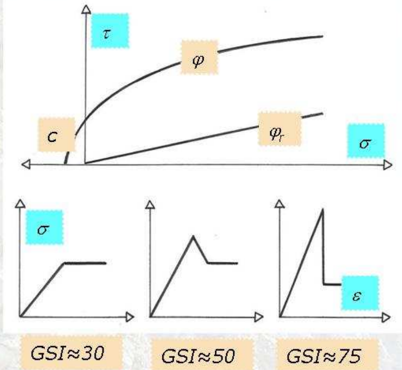
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_x - \nu\cdot(\sigma_y + \sigma_z)] \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_y - \nu\cdot(\sigma_x + \sigma_z)] \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_z - \nu\cdot(\sigma_x + \sigma_y)] \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G}$$

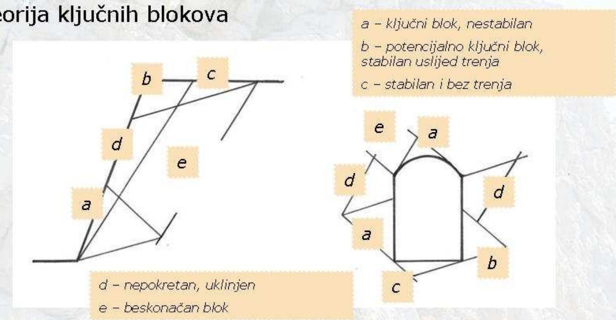
Teorija plastičnosti

- Pojava trajnih deformacija prilikom rasterećenja materijala te plastičnih deformacija nakon što se postigne vršna čvrstoća materijala
- Znatno složeniji odnosi između naprezanja i deformacija nakon postignuća vršne čvrstoće



Teorija blokova

- Pretpostavka o potpunoj krutosti blokova a svi pomaci da se dešavaju na kontaktima (diskontinuitetima) između blokova
- Teorija ključnih blokova

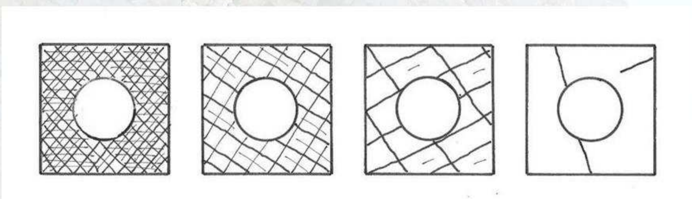


Metode proračuna

- Metode granične ravnoteže (statičke)
  - Mehanika kontinuuma
    Metode opće granične ravnoteže
  - Mehanika diskontinuuma
    Metoda ključnih blokova
- Numeričke metode (dinamičke)
  - Mehanika kontinuuma
    Metoda konačnih elemenata (MKE)
    Metoda konačnih diferencija (MKD)
    Metoda rubnih elemenata (MRE)
  - Mehanika diskontinuuma
    Metoda diskretnih elemenata (MDE)
    (eksplicitna, implicitna)

Izbor modela i metode proračuna

Koncepcija kvazikontinuuma → Koncepcija diskontinuuma → Koncepcija kontinuuma



MKE MKD | GSI≥25 MDE GSI≤85 | MKE MKD