

Sadržaj

ELEKTROSTATIKA	68
SPOJEVI KONDENZATORA	69
ELEKTROSTATIKA - ZADACI	71
ZADACI ZA VJEŽBU	86
RJEŠENJA.....	86

Elektrostatika

Električni naboj: $Q = n \cdot e$

n - cijeli broj

$e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Coulombov zakon:

Sila međudjelovanja (privlačenja ili odbijanja) točkastih naboja ili kugli naboja q_1 i q_2 udaljenih r (za kugle, r je udaljenost između središta kugli):

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ - apsolutna dielektrična konstanta ili dielektričnost vakuumu

ϵ_r – relativna dielektrična konstanta (relativna dielektričnost), ovisna o sredstvu u kojem se nalaze naboji.

Sila je odbojna ako su naboji istog predznaka, a privlačna ako su različitih predznaka.

Relativna dielektričnost nekih tvari

Tvar	ϵ_r	Tvar	ϵ_r	Tvar	ϵ_r
Čvrste tvari		Polietilen	2,3	Glicerin	42,5
Asfalt	2,7	Signettova sol	(6000)	Glikol	40,5
Drvo (hrast)	(5)	Stiropor	1,1-1,3	Voda (0 °C)	87,90
Granit	7-9	Staklo	4-8	Voda (25 °C)	78,38
Guma	3,2	Tekućine		Voda (100 °C)	55,51
Silicij	11,7	Aceton	20,70	Plinovi (20 °C)	
Led (0 °C)	91,5	Benzen	2,28	Ugljični dioksid	1,000902
Kondenz. papir	4-6	Kloroform	4,72	Zrak	1,000594
PVC	2,8	Tekući helij (3K)	1,06	Vodik	1,000272
Pleksi	2,6	Etanol	24,55	Vakuum	1,00

Jakost polja točkastog naboja ili kugle na udaljenosti r :

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Potencijal točkastog naboja i kugle na udaljenosti r :

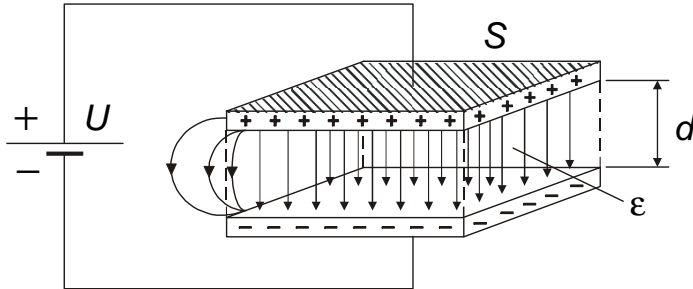
$$\rho = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{q}{r}$$

Kapacitet pločastog kondenzatora:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

S – kondenzator se sastoji od dviju ploča jednake pojedinačne površine S
 d – međusobna udaljenost dviju paralelnih ploča

Između ploča kondenzatora nalazi se homogeno električno polje.

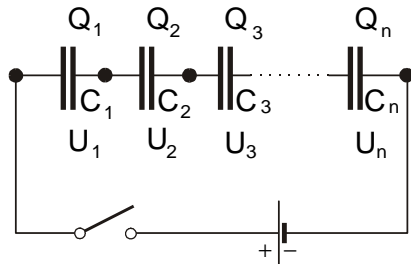


Kapacitet	Naboj na pločama	Energija	Polje
$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$	$Q = C \cdot U$	$W = \frac{U^2 \cdot C}{2}$	$E = \frac{U}{d}$

Q – naboj (apsolutna vrijednost) na svakoj od međusobno paralelnih ploča, svaka površine S , udaljenih d (uz uvjet da su dimenzije ploča $\gg d$), U – napon između ploča.

Spojevi kondenzatora

Serijski spoj kondenzatora:



Naboj Q je jednak na svim kondenzatorima (influcija):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n \text{ (kao struja } I)$$

Ukupni napon jednak je zbroju napona na pojedinim kondenzatorima:

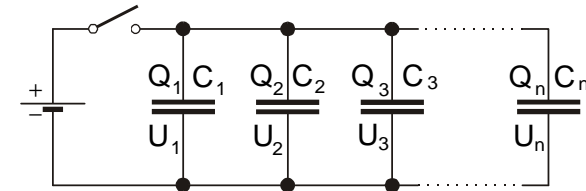
$$U_{uk} = \sum_{i=1}^n U_i$$

$$C = \frac{Q}{U} \rightarrow U = \frac{Q}{C} \text{ – što se uvrsti u jednadžbu napona:}$$

$$\frac{Q_{uk}}{C_{uk}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \dots + \frac{Q_n}{C_n} \quad / : Q$$

$$\frac{1}{C_{uk}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \text{odnosno} \quad \frac{1}{C_{uk}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_n}$$

Paralelni spoj kondenzatora:



Napon je jednak na svim kondenzatorima:

$$U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n$$

Ukupni naboj jednak je zbroju naboja na pojedinim kondenzatorima:

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$\text{uz } Q = C \cdot U$$

$$C_{uk} \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \dots + C_n \cdot U = U \cdot (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \quad / : U$$

$$C_{uk} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad \text{odnosno} \quad C_{uk} = \sum_{i=1}^n C_n$$

Možemo rezimirati za spojeve kondenzatora:

n spojenih kondenzatora	
serijski	paralelno
$\frac{1}{C_{uk}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$	$C_{uk} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Elektrostatika - zadaci

- 5.1. Kolika sila djeluje na naboj od $2 \cdot 10^{-6}$ As i naboj od $-5 \cdot 10^{-6}$ As koji su međusobno udaljeni 4 cm u svojstvu dielektrične konstante $8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm?

$$Q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

$$Q_2 = -5 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

$$r = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

$$F_{nQ1} = ?, F_{nQ2} = ?$$

Naboji se privlače jer su suprotnih predznaka.

Sila se računa prema: $F = E \cdot Q$

Sila na naboj Q_1 je: $F_{nQ1} = E_{Q2} \cdot Q_1$

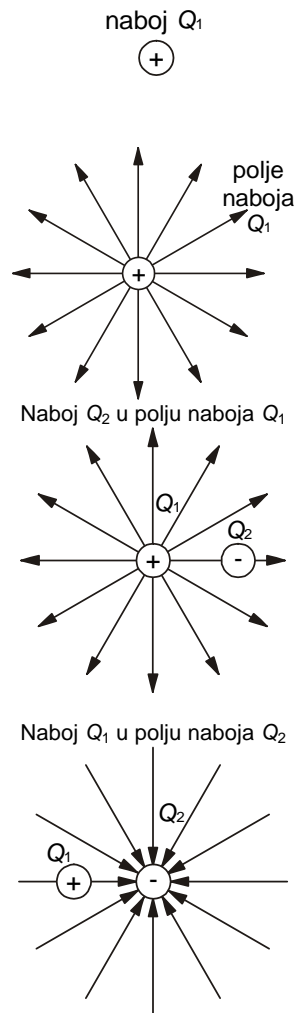
Polje naboja Q_2 je: $E_{Q2} = \frac{Q_2}{4r^2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}$

i slijedi: $F_{nQ1} = \frac{Q_2}{4r^2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot Q_1$

Sila na naboj Q_2 je: $F_{nQ2} = E_{Q1} \cdot Q_2$

Polje naboja Q_1 je: $E_{Q1} = \frac{Q_1}{4r^2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}$

i slijedi: $F_{nQ2} = \frac{Q_1}{4r^2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot Q_2$



Slika 5-1.

$$F_{nQ1} = F_{nQ2} \quad - \text{Coulombov zakon}$$

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$F = \frac{1}{4 \cdot 3,14159 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ As} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{(4 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} = 56,17 \text{ N}$$

- 5.2. Kolika je i kojeg je smjera sila na naboj Q_1 prema slici ako su naboji jednaki $2 \mu\text{C}$ i udaljeni 0,1 m?

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2 \mu\text{C}$$

$$r = 0,1 \text{ m}$$

$$F_1 = ?$$

Naboji Q_1 i Q_2 se odbijaju silom:

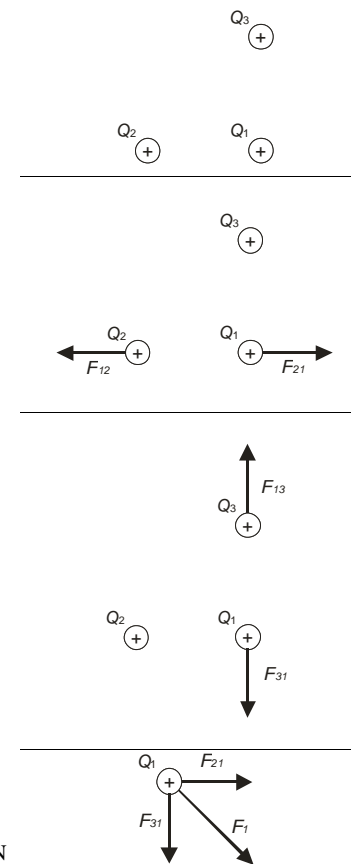
$$F_{21} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 3,6 \text{ N}$$

Naboji Q_1 i Q_3 se odbijaju silom:

$$F_{31} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 3,6 \text{ N}$$

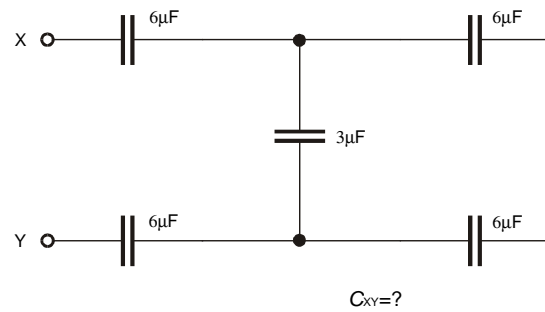
Ukupna sila jednaka je vektorskom zbroju sila F_{21} i F_{31} :

$$F_1 = \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2} = \sqrt{(3,6 \text{ N})^2 + (3,6 \text{ N})^2} = 5,08 \text{ N}$$



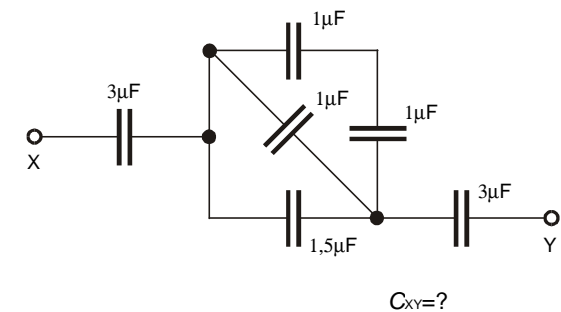
Slika 5-2.

- 5.3. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



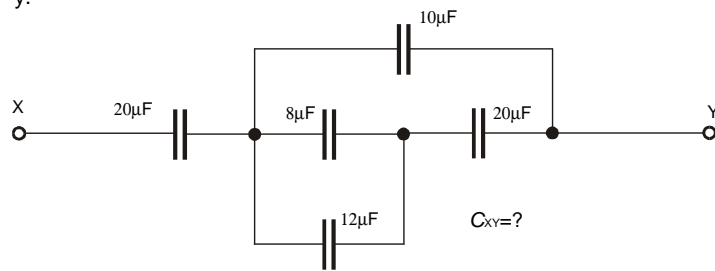
Slika 5-3.

- 5.4. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



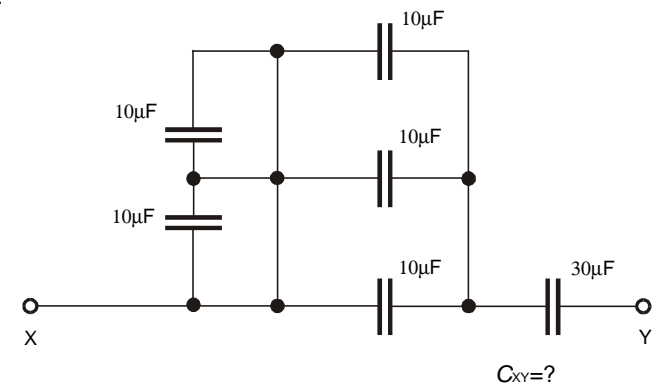
Slika 5-4.

- 5.5. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



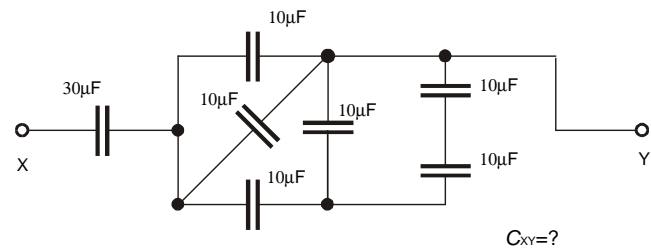
Slika 5-5.

- 5.6. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



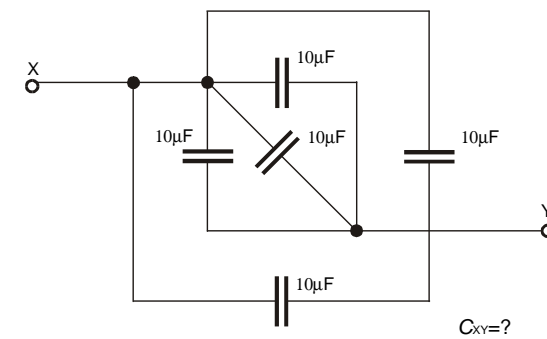
Slika 5-6.

- 5.7. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



Slika 5-7.

- 5.8. Koliki je ukupni kapacitet kombinacije kondenzatora spojenih između točka x i y.



Slika 5-8.

- 5.9. Kolika je energija nabijenog kondenzatora kapaciteta $100 \mu\text{F}$, ako je nabijan 2 sekunde strujom iste jakosti od 1 mA ? Koliki je napon nabijenog kondenzatora?

$$\begin{aligned} C &= 100 \mu\text{F} \\ t &= 2 \text{ s} \\ I &= 1 \text{ mA} \\ W &=? \\ U &=? \end{aligned}$$

Nabijanje kondenzatora iz izvora KONSTANTNE STRUJE !!!

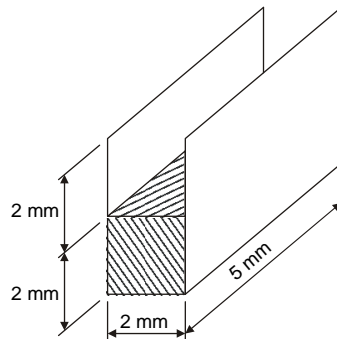
$$Q = I \cdot t = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ As}$$

$$W = \frac{U^2 \cdot C}{2} \quad \text{koristeći} \quad U = \frac{Q}{C} \quad \text{dobivamo:} \quad W = \left(\frac{Q}{C} \right)^2 \cdot \frac{C}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 0,02 \text{ J}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ V}$$

- 5.10. Za kondenzator koji je izveden kao što je prikazano na slici izračunajte kapacitet i energiju ako je nabijen na napon od 100 V . Relativna dielektrična konstanta donjeg dielektrika jednak je 10.



Slika 5-9.

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

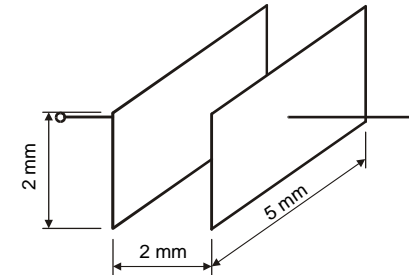
$$C = C_0 + C_1 \quad C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{S_0}{d_0} \quad C_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S_1}{d_1} \quad S_0 = S_1 = S \quad d_0 = d_1 = d$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} + \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d} \cdot (1 + \epsilon_r) = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cdot 11 =$$

$$C = 0,4873 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 0,4873 \text{ pF}$$

$$W = \frac{U^2 \cdot C}{2} = 2,44 \text{ mJ}$$

- 5.11. Iz izvora napona 100 V prilikom nabijanja kondenzatora utrošena je energija od $2,215 \text{ nJ}$. Koliki je kapacitet priključenog kondenzatora? Kolika je relativna dielektričnost ϵ_r materijala između ploče ako su dimenzije kondenzatora kao na slici 5-10?



Slika 5-10.

$$C = \frac{2 \cdot W}{U^2} = \frac{2 \cdot 2,215 \cdot 10^{-9} \text{ J}}{(100 \text{ V})^2} = 4,43 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0,443 \text{ pF}$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

$$\epsilon_r = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{4,43 \cdot 10^{-13} \text{ F} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$\epsilon_r = 10$$

- 5.12. Iz izvora napona 100 V prilikom nabijanja kondenzatora utrošena je energija od $0,02 \text{ J}$. Koliki je kapacitet priključenog vakumskog kondenzatora? Koliko bi energije bilo utrošeno da je umjesto vakuuma između ploča kondenzatora bila materija s relativnom dielektričnom konstantom $1,8$?

$$W_0 = \frac{U^2 \cdot C_0}{2}$$

$$C_0 = \frac{2 \cdot W_0}{U^2} = 4 \mu\text{F}$$

$$C = \epsilon_r \cdot C_0 = 1,8 \cdot C_0 = 7,2 \mu\text{F}$$

$$W = \frac{U^2 \cdot C}{2} = 0,036 \text{ J}$$

5.13. Izračunajte minimalni potrebni napon istosmjernog izvora kojim se želi aktivirati 10 serijski spojenih detonatora pojedinačnog otpora od 2Ω ako je serijska struja paljenja jednaka 1 A ? Da li je akumulator prikladan izvor za takvu vrstu aktivacije? Koliko se maksimalno serijski spojenih detonatora može aktivirati sa strujom iz akumulatora? Ako se detonatori žele aktivirati kondenzatorskom palilicom s kondenzatorom kapaciteta $10 \mu\text{F}$ i ako je za detonatore navedena minimalna specifična energija pri kojoj svi detonatori pale jednaka $3 \text{ mJ}/\Omega$, koliki je minimalni napon na koji treba nabiti kondenzator da bi se detonatori pouzdano aktivirali?

Ukupni otpor serijski spojenih detonatora jednak je:

$$R_{\text{uk}} = R_1 + R_2 + \dots + R_{10} = n \cdot R_i = 10 \cdot 2 \Omega = 20 \Omega.$$

Da bi kroz detonatore tekla struja od 1 A , kada se spoje na izvor napona, potreban je napon od:

$$U = I \cdot R_{\text{uk}} = 1 \text{ A} \cdot 20 \Omega = 20 \text{ V},$$

dakle akumulator s nazivnim naponom od 12 V ima premali napon da bi dao traženu struju od 1 A tj. akumulator bi dao struju od samo $12 \text{ V}/20 \Omega = 0,6 \text{ A}$ zbog čega se vjerojatno ne bi aktivirali svi detonatori.

Maksimalni otpor serijskog spoja detonatora, uz korištenje akumulatora i zadovoljavanje uvjeta struje od 1 A , jednak je:

$$R_{\text{uk maks}} = \frac{U}{I} = \frac{12 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 12 \Omega,$$

što znači da se uz pojedinačni otpor od 2Ω maksimalno smije spojiti $12 \Omega / 2 \Omega = 6$ detonatora u seriju.

Ako se za paljenje koristi kondenzatorska palilica, energija na kondenzatoru računa se prema:

$$W = \frac{U^2 \cdot C}{2},$$

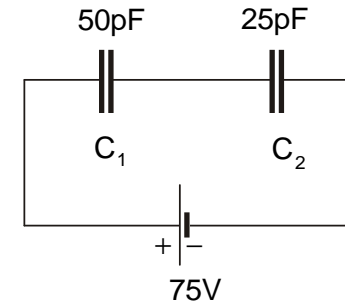
a specifična energija jednaka je:

$$\left(\frac{W}{R}\right) = \frac{U^2 \cdot C}{2 \cdot R},$$

iz čega slijedi minimalni potrebni napon:

$$U = \sqrt{\left(\frac{W}{R}\right) \cdot \frac{2 \cdot R}{C}} = \sqrt{3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mJ}}{\Omega} \cdot \frac{2 \cdot 20 \Omega}{10 \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 109,54 \text{ V}$$

5.14. Koliki je napon na pojedinom kondenzatoru prikazanom na slici 5-11?



Slika 5-11.

Naboj je jednak na oba dva kondenzatora:

$$Q_{C_1} = Q_{C_2}$$

uz $C = \frac{Q}{U}$ tj. $Q = C \cdot U$ dobivamo:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot U_{C_1} &= C_2 \cdot U_{C_2} \\ U_{C_1} + U_{C_2} &= U \end{aligned}$$

Dobivaju se dvije jednačbe sa dvije nepoznanice

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_{C_2}}{U_{C_1}}$$

$$U_{C_2} = U - U_{C_1}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_{C_1}}{U_{C_1}}$$

$$U - U_{C_1} = \frac{C_1}{C_2} U_{C_1}$$

$$U = U_{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)$$

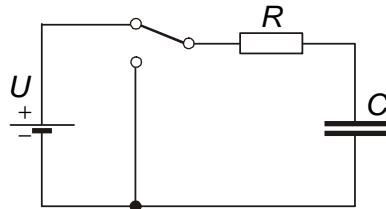
$$\text{Dobivamo napon na prvom kondenzatoru: } U_{C_1} = \frac{U}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{75 \text{ V}}{1 + \frac{50 \text{ pF}}{25 \text{ pF}}} = \frac{75 \text{ V}}{3} = 25 \text{ V}$$

i na drugom kondenzatoru:

$$U_{C_2} = 75 \text{ V} - 25 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

5.15. Nabijanje i izbijanje kondenzatora u strujnom krugu.

Nabijanje kondenzatora iz izvora KONSTANTNOG NAPONA !!!

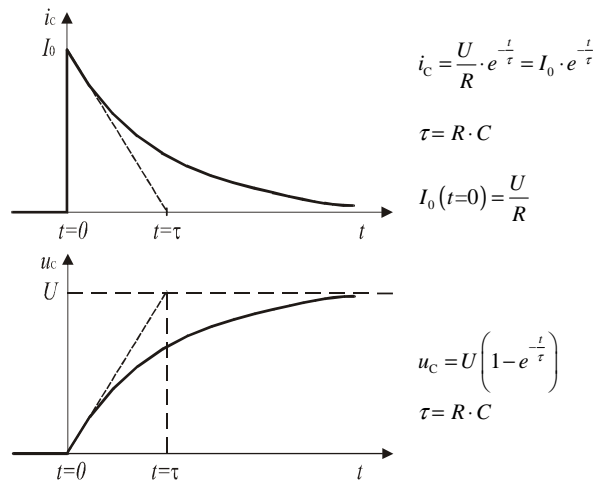


Slika 5-12.

$$\tau = R \cdot C$$

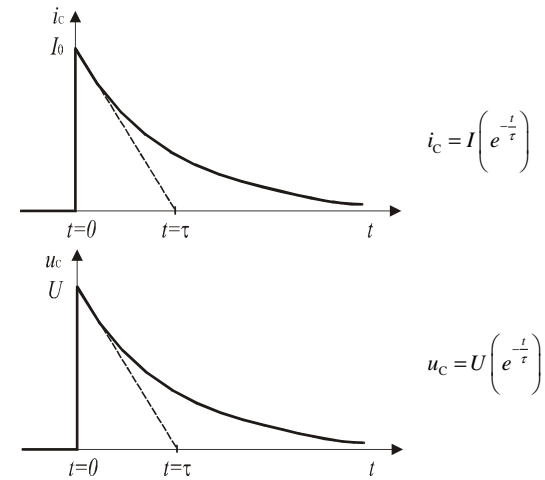
$$\frac{U - u_C}{R} = i_C$$

Nabijanje (punjenje) kondenzatora:



Slika 5-13.

Izbijanje kondenzatora:



Slika 5-14.

5.16. Kondenzator kapaciteta $10 \mu\text{F}$ puni se preko otpornika od $100 \text{ k}\Omega$, izvorom naponom od 10 V . Koliko će vremena trebati da napon na kondenzatoru naraste na 3 V .

Radi se o punjenju kondenzatora, promatra se napon pa koristimo jednadžbu:

$$u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ pri čemu je vrijeme } t \text{ nepoznanica}$$

$$\frac{u_C}{U} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{u_C}{U} \quad |\ln$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln \left(1 - \frac{u_C}{U} \right)$$

$$t = -\tau \cdot \ln \left(1 - \frac{u_C}{U} \right) \quad \text{pri čemu je } \tau = R \cdot C = 100 \text{ k}\Omega \cdot 10 \mu\text{F} = 1 \text{ s}$$

$$t = -1 \text{ s} \cdot \ln \left(1 - \frac{3 \text{ V}}{10 \text{ V}} \right) = -1 \text{ s} \cdot \ln(1 - 0,3) = -1 \text{ s} \cdot \ln(0,7) = -1 \text{ s} \cdot (-0,35667) = 0,35667 \text{ s}$$

ZADACI ZA VJEŽBU

- Izračunajte kapacitet kondenzatora koji je načinjen od dvije ploče; svaka od njih ima površinu $S = 120 \text{ cm}^2$. Ploče su odijeljene zračnim slojem debljine $d = 0,5 \text{ cm}$.
- Koliki je rezultirajući kapacitet grupe kondenzatora kapaciteta $C_1 = 100 \text{ pF}$, $C_2 = 300 \text{ pF}$, $C_3 = 500 \text{ pF}$, $C_4 = 1000 \text{ pF}$ i $C_5 = 3000 \text{ pF}$, ako ih se spoji a) serijski, b) paralelno?
- Koliki je rezultirajući kapacitet kondenzatora $C_1 = 200 \text{ pF}$, $C_2 = 1000 \text{ pF}$, $C_3 = 600 \text{ pF}$, ako su kondenzatori C_1 i C_2 spojeni paralelno, a na njih se serijski nadovezuje kondenzator C_3 ?
- Kolika mora biti udaljenost između ploča kondenzatora čija je površina jedne ploče 1 m^2 da kapacitet bude $8,85 \text{ nF}$? Razmak između ploča ispunjen je zrakom?
- Koliki je ukupni kapacitet triju kondenzatora ($2 \text{ }\mu\text{F}$, $5 \text{ }\mu\text{F}$ i $10 \text{ }\mu\text{F}$) ako ih se spoji na različite načine?

Rješenja

- $C = 21,2 \text{ pF}$
- $C_s = 60 \text{ pF}$, $C_s = 4900 \text{ pF}$
- $C = 400 \text{ pF}$
- $d = 0,01 \text{ m}$
- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| $1,25 \text{ }\mu\text{F}$ | $1,76 \text{ }\mu\text{F}$ | $3,53 \text{ }\mu\text{F}$ | $4,12 \text{ }\mu\text{F}$ |
| $5,33 \text{ }\mu\text{F}$ | $6,67 \text{ }\mu\text{F}$ | $11,43 \text{ }\mu\text{F}$ | $17 \text{ }\mu\text{F}$ |

- 5.17. Napon kondenzatora kapaciteta C smanji se sa 1500 V na 1060 V u trajanju od jednog sata. Otpor dielektrika jednak je $R = 20 \cdot 10^{12} \Omega$. Izračunajte kapacitet takvog kondenzatora?

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

uz $Q = C \cdot U$ odnosno $dQ = C \cdot dU$

$$i = -C \frac{dU}{dt} = \frac{U}{R}$$

$$-C \cdot R \cdot \frac{dU}{U} = dt$$

$$-C \cdot R \int_{U_1}^{U_2} \frac{dU}{U} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$C \cdot R \cdot \ln \frac{U_1}{U_2} = t_2 - t_1 = \Delta t$$

$$C = \frac{\Delta t}{R \cdot \ln \frac{U_1}{U_2}} = \frac{3600 \text{ s}}{20 \cdot 10^{12} \Omega \cdot \ln \frac{1500 \text{ V}}{1060 \text{ V}}} = 517 \text{ pF}$$

(Na sličan način može se izračunati otpor dielektrika R uz poznati kapacitet C)

- 5.18. Koliki kapacitet ima kugla veličine planeta zemlje ispunjena vakuumom? Koliki je kapacitet planeta zemlje (pretpostavite da je relativna dielektričnost 8)? Polumjer zemaljske kugle jednak je $R = 6400 \text{ km}$.

$$C = 4\pi \cdot \epsilon \cdot R = 4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$C_0 = 712 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 712 \text{ }\mu\text{F}$$

$$C = 8 \cdot 712 \text{ }\mu\text{F} = 5,696 \text{ mF}$$